

CH3 UNIVERS PRIMORDIAL

3.1 Egalités matière = Λ et matière = radiation

→ Rappel: $\rho = \rho_{cr} (\Omega_m^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_r^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda^0)$

⊙ Egalité $m = \Lambda$:

→ On s'intéresse au moment où $\rho_m = \rho_\Lambda \gg \rho_r$, c'est à dire lorsque $\Omega_m^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \Omega_\Lambda^0$

$$\Leftrightarrow \frac{a_0}{a} = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0}\right)^{1/3} \sim 1,31 = 1 + z_{m=\Lambda}^{EG}$$

$$\Leftrightarrow t_{m=\Lambda}^{EG} = \frac{1}{H_0} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\Omega_\Lambda^0} \cdot \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right] \sim 10,3 \cdot 10^{10} \text{ yrs}$$

⊙ Egalité $m = r$:

→ On regarde au moment où $\rho_m = \rho_r \gg \rho_\Lambda$, ie lorsque $\Omega_m^0 = \Omega_r^0 \frac{a_0}{a} \Leftrightarrow \frac{a_0}{a} = 1 + z_{m=r}^{EG} \sim 3 \cdot 10^3$

$$\Leftrightarrow t_{m=r}^{EG} \sim \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^0}} (1 + z_{m=r}^{EG})^{-3/2} \sim 56 \text{ 000 ans}$$

3.2 Époque dominée par la radiation

3.2.1 Equilibre cinétique:

→ Si les particules dans le plasma interagissent rapidement, une redistribution des impulsions/énergies s'opère. On observe alors des distributions d'énergie caractérisées par la température T .

DEF La distribution de Bose-Einstein $\mathcal{L}_B$ est définie selon

$$\mathcal{L}_B(\vec{p}) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{(E-\mu)}{T}\right\} - 1}$$

où μ est le potentiel chimique

DEF

La distribution de Fermi-Dirac f_F est définie selon :

$$f_F(\vec{p}) \equiv \frac{1}{\exp\left\{\frac{E-\mu}{T}\right\} + 1}$$

- La distribution de Bose-Einstein est obtenue en calculant la fonction de partition pour des bosons, et celle de Fermi-Dirac en calculant la fonction de partition des fermions.
- ex: la réaction rapide $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$. Alors on aurait $f_{e\gamma}^B(T_\gamma)$ et $f_F^e(T_e)$ avec $T_e = T_\gamma \equiv T$

3.2.2 Equilibre chimique:

- Il y a équilibre chimique lorsque des collisions inélastiques se produisent rapidement dans le plasma.
 $i + j \rightarrow k + l$ et $k + l \rightarrow i + j$ rapidement, alors les potentiels chimiques s'égalisent: $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l$
- ex: $e^\pm + \gamma \rightleftharpoons e^\pm + \gamma + \gamma$: si les $e^\pm$ peuvent émettre et absorber des photons rapidement, alors $T_\gamma = T_{e^\pm}$ et $\mu_e + \mu_\gamma = \mu_e + 2\mu_\gamma$
 $\Leftrightarrow \mu_\gamma = 0$. In this case, $f_B^\gamma = (e^{E/T} - 1)^{-1}$ only depends on T_γ .
- ex: $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma + \gamma$ Alors $T_{e^+} = T_{e^-} = T_\gamma$ et $\mu_{e^+} + \mu_{e^-} = 2\mu_\gamma = 0$
 $\Leftrightarrow \mu_{e^+} = -\mu_{e^-}$

3.2.3 Photons:

- Si les γ n'avaient pas d'interactions, on aurait $\frac{n_\gamma}{V} = \text{cte}$ et
 $E_\gamma = E_\gamma^{\text{initial}} \cdot \frac{a^{\text{initial}}}{a} = E_\gamma^i (1+z)^{-1}$
- La distribution en énergie est la distribution initiale, multipliée par le redshift, $\neq f_B \Rightarrow$ Pas de température définie.

→ Avec interaction, par ex. $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \gamma$ et $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \gamma + \gamma$,
on aurait $f_B^\gamma|_{\mu_\gamma=0} = (\exp\{\beta E\} - 1)^{-1}$

↳ La densité du photon vaut donc

Ch 9.2.4
physique stat

$$\begin{aligned} n_\gamma &= g_\gamma \int f_B^\gamma(\vec{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{g_\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{\beta E} - 1} \\ &= \frac{g_\gamma T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{y^2}{e^y - 1} dy = \frac{g_\gamma T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 (e^{-y} + e^{-2y} + e^{-3y} + \dots) \\ &= \frac{g_\gamma T^3}{2\pi^2} 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) = \frac{g_\gamma T^3}{\pi^2} \zeta(3) = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) T^3 \end{aligned}$$

Où $g_\gamma = 2$ le # de polarisation du photon.

↳ La densité d'énergie est donnée par :

$$\rho_\gamma = g_\gamma \int f_B^\gamma(\vec{p}) E_\gamma \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{g_\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E^3 dE}{e^{\beta E} - 1} = \frac{\pi^2}{30} g_\gamma T^4$$

On s'attendait bien à $\rho_\gamma \propto T^4$ car $\rho_\gamma = n_\gamma \langle E_\gamma \rangle \propto T^3 \cdot T$

↳ La pression est donnée par :

$$P = g_\gamma \int f_B^\gamma(\vec{p}) \frac{|\vec{p}|^2}{3E} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = g_\gamma \int f_B^\gamma(\vec{p}) \frac{E}{3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \rho_\gamma / 3$$

$$\Rightarrow W = P/\rho = 1/3$$

↳ Enfin, l'énergie est déterminée par :

$$\langle E_\gamma \rangle = \rho_\gamma / n_\gamma = \frac{\pi^4}{30 \zeta(3)} \cdot T \approx 2,7 T$$

3.2.4 Positrons et électrons :

→ Sans interaction, on a : $n_{e^+} \cdot V = \text{cste} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{e^+}^{\text{ini}} = E_{e^+} \cdot (1 + \beta) \\ n_{e^-} \cdot V = \text{cste} \end{array} \right.$

↳ Pas de température définie pour les e^+ et e^- .

→ Si interaction $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \gamma$ rapide, alors il y a équilibre cinétique: $f_F^{e^\pm} = (\exp\{(E - \mu_{e^\pm})/T\} + 1)^{-1}$ avec $T_{e^+} = T_{e^-} = T_\gamma$

et $n_{e^\pm} = g_{e^\pm} \int f_F^{e^\pm}(\vec{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$

→ Si en plus, on a $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma + \gamma$, on a aussi équilibre chimique: $\mu_{e^+} = -\mu_{e^-}$. Ceci implique que $n_{e^+} + n_{e^-}$ est fixé par n_γ , mais que $n_{e^+} - n_{e^-}$ reste fixé.

↳ En prenant comme condition initiale que $n_{e^+} - n_{e^-} = \text{cte} = 0$, alors $\mu_{e^+} = -\mu_{e^-} = 0$. Alors:

→ $n_{e^+} = n_{e^-} = g_{e^-} \int f_F^e(\vec{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{3}{4} \frac{5(3)}{\pi^2} g_e T^3$

→ $f_{e^+} = f_{e^-} = g_{e^-} \int f_F^e(\vec{p}) \cdot E \cdot \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_e T^4$

→ $\rho_{e^+} = \rho_{e^-} = g_e \int f_F^e(\vec{p}) \cdot \frac{\vec{p}^2}{E} \cdot \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = f_e / 3$

↳ $\langle E_{e^\pm} \rangle = \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{30} \frac{4}{35(3)} T \approx 3,1 T$

3.2.5 Bain thermique général avec $\mu \ll T$:

→ Chaque boson contribue de $\rho_{Bi} = \frac{\pi^2}{30} T_i^4 g_i$ et chaque fermion contribue de: $\rho_{Fi} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T_i^4 g_i$

→ La densité d'énergie totale est donnée par:

$$\rho_{\text{tot}} = \frac{\pi^2}{30} T_\gamma^4 \left(\sum_{b=\text{boson}} g_b \left(\frac{T_b}{T_\gamma} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{f=\text{fermion}} g_f \left(\frac{T_f}{T_\gamma} \right)^4 \right)$$

Dodelson eq 9.25

DÉF

On définit le nombre effectif de degrés de liberté relativiste g_* selon $g_* \equiv \sum_{b=\text{boson}} g_b \left(\frac{T_b}{T_\gamma} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{f=\text{fermion}} g_f \left(\frac{T_f}{T_\gamma} \right)^4$

↳ La densité d'énergie totale se réécrit:

$$\rho_{\text{tot}} = \frac{\pi^2}{30} T^4 g_*$$

2.2.6 Temps et paramètre d'Hubble en fct de T :

→ La température est $\propto$ à l'énergie du photon, donc $\frac{a_0}{a} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow T \propto \frac{1}{a}$

→ Pour le cas plat, dans un univers de radiation, on avait :

pl6

$$a(t) = \sqrt{\frac{8\pi G \rho a^4}{3}} \sqrt{2t} = \sqrt{C} \sqrt{2t}$$

$$= \frac{1}{m_{Pl}} \sqrt{\frac{8\pi^3}{90}} \sqrt{g_*} \sqrt{T^4 a^4}$$

$$\text{On trouve } t = \frac{1}{2} \frac{a^2}{C} = 0,301 \frac{m_{Pl}}{\sqrt{g_*}} \cdot \frac{1}{T^2}$$

$$\text{et } H(t) = \frac{1}{2t} \approx 1,66 \sqrt{g_*} \frac{T^2}{m_{Pl}}$$

3.3 Entropie

Eg 3.63/Kdb-Torres

PR op

L'entropie pour des particules relativistes est donnée par

$$S = \frac{\rho + p}{T} \cdot V \Leftrightarrow s = \frac{\rho + p}{T}$$

→ L'entropie est conservée dans un volume comobile.

En effet $\nabla_\mu T^\mu = 0 \Rightarrow d(\rho V) = -p dV$. Or, $d(\rho V) = -p dV + T ds$
so $ds = 0$.

Alternativement, à l'éq. thermique, $\frac{\rho + p}{T} \propto T^3$ et $V \propto t^3$

→ A l'équilibre thermique, $s_g = \frac{\rho_g + p_g}{T_g} = \frac{2\pi^2}{45} g_g T_g^3$

$$\text{En général : } s_{\text{tot}} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3$$

DEF

Le nombre de dof relativiste pour l'entropie g_{*S} est défini

$$\text{selon } g_{*S} \equiv \sum_{b=bos} g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{f=fem} g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^3$$

$$\hookrightarrow \text{On a alors } s_{\text{tot}} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3$$

3.4 Particule non-rel en eq. thermique

→ S'il y a équilibre thermique pour une particule, sa densité est donnée par une statistique f_B ou f_F :

pour une particule p ;

$$n_p = \frac{g_p}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p = \frac{g_p}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} d^3p$$

→ Pour $T \ll m_p$, la particule cesse d'être relativiste. Alors:

$$n_p = \frac{g_p}{(2\pi)^2} \int_{m_p}^{\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m_p^2} E dE}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \simeq g_p \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left\{ -\frac{(m_p - \mu)}{T} \right\}$$

$$\text{et } p_p = \frac{g_p}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) E d^3p \simeq m_p \cdot n_p \text{ à } T < m_p, E \simeq m_p$$

$$\text{De plus, } \mu = \frac{g_p}{(2\pi)^2} \int_{m_p}^{\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m_p^2} E \cdot p^2 dE}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \simeq n_p \cdot T \ll p_p$$

↳ La matière n'a donc pas de pression.

→ Si à $T < m_p$, la particule p est à l'équilibre chimique, par exemple via $p + \bar{p} \rightleftharpoons \gamma + \gamma$, on aurait encore $\mu_p = -\mu_{\bar{p}}$

① Si $n_p = n_{\bar{p}}$:

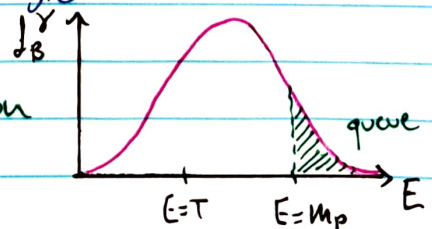
→ Valable si on avait $\mu_p = -\mu_{\bar{p}} = 0$ initialement

→ On a $n_p = n_{\bar{p}} = g_p \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{(m_p/T)}{T}}$ → suppression de Boltzmann
 $\ll 1$ pour $T \ll m_p$

Lorsque l'énergie critique est trop faible pour avoir $\gamma + \gamma \rightarrow p + \bar{p}$, on a une suppression de Boltzmann: les photons ayant assez d'énergie pour effectuer ce processus se trouvent dans la queue de la distribution d'énergie:

↳ $n_p = n_{\bar{p}} \propto \exp\{-m_p/T\}$

C'est la catastrophe d'annihilation



27

○ Si $n_p > n_{\bar{p}}$:

→ Valide si on avait $\mu_p = -\mu_{\bar{p}} > 0$ initialement.

→ Dans ce cas, l'équilibre chimique et thermique mène à une catastrophe d'annihilation pour les antiparticules $\bar{p}$:

$$n_{\bar{p}} \propto \exp\left\{-\frac{(m_{\bar{p}} - \mu_{\bar{p}})}{T}\right\} \ll 1$$

↳ Toutes les antipart. vont se faire annihiler par les particules, et certaines particules subsisteront :

$$\frac{n_p - n_{\bar{p}}}{V} \simeq \frac{n_p}{V} = \text{cte}, \quad n_p \propto \exp\left\{-\frac{(m_p - \mu_p)}{T}\right\}$$

$$\hookrightarrow \mu_p = -\mu_{\bar{p}} = m_p + \epsilon \text{ avec } \epsilon \text{ tq } \frac{n_p}{V} = \text{cst}$$

3.5 Découplage chimique d'un type de particule

DEF | Un découplage chimique se produit lorsque une particule sort de son équilibre chimique.

→ Considérons une diffusion $i+j \rightarrow k+l$ avec équilibre chimique :
 $i+j \rightleftharpoons k+l$ avec $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l$. Il faut comparer le temps moyen par lequel i ait une réaction avec $1/H \simeq$ l'âge de l'univers.

DEF | Le taux de réaction Γ est défini selon $\Gamma \equiv 1/\Delta t$, où Δt est le temps moyen d'une réaction.

La condition d'équilibre chimique s'exprime alors comme :

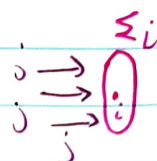
$$\Delta t < \frac{1}{H} \Leftrightarrow \Gamma > H$$

→ Si $\Gamma < H$, pas d'équilibre chimique car i et j n'auraient pas le temps de se rencontrer depuis le big bang.

→ On peut exprimer $\Gamma_i = n_j \langle \sigma v_{ij} \rangle$

③ Taux de réaction pour une annihilation :

→ On a $\sigma(i+j \rightarrow k+l) = \frac{\# \text{ de transition par seconde}}{\# \text{ flux de } j \text{ à travers } \Sigma_i}$



$$\hookrightarrow n_j \langle \sigma_{ij} \rangle = \# \text{ transition par seconde} = \Gamma_i$$

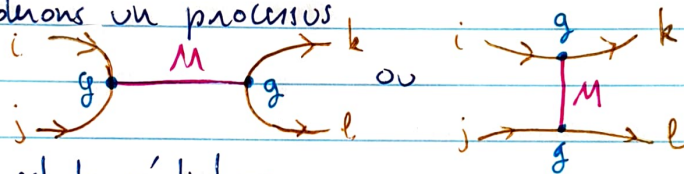
DEF La densité de réaction $\gamma_{ij \rightarrow ke}$ est définie selon

$$\gamma_{ij \rightarrow ke} \equiv n_i n_j \langle \sigma_{ij} \rangle$$

C'est le nombre de diffusion $i+j \rightarrow k+l$ se produisant par unité de temps et de volume.

→ On peut alors déterminer quand est-ce qu'une particule i entre en équilibre thermique dans le bain thermique :

Considérons un processus



où M est le médiateur.

On suppose $T \gg m_i, m_j, m_M, m_k, m_l$: alors

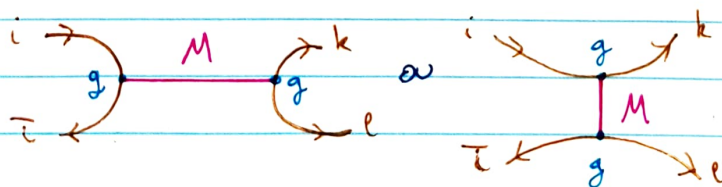
$$\Gamma_i = n_j \langle \sigma_{ij} \rangle \quad \text{Or, } v=c=1 \text{ et } \alpha = g^2/4\pi \text{ et } n_j \propto T^3 \\ \propto T^3 \cdot \frac{\alpha^2}{T^2} \propto \alpha^2 \cdot T \quad \text{Or, } H \propto \frac{T^2}{m_{pe}}$$

Ainsi, pour $\Gamma_i > H$, il faut $\alpha^2 m_{pe} > T$

équilibrage → Il y a équilibre thermique pour $T < 10^{-6}$ GeV

→ Similairement, on peut déterminer quand s'installe l'équilibre thermique. Il faut alors différencier 2 cas : celui d'un médiateur lourd, et celui d'un médiateur léger.

Considérons $i + \bar{i} \rightleftharpoons k + l$ avec $m_k, m_l \ll m_i$



③ Cas du médiateur massif: $m_M \gg m_i \gg m_h, m_e$

→ Pour $m_M \gg T \gg m_i$, on a:

$$\Gamma_i = n_i \langle \sigma v \rangle \propto T^3 \cdot \frac{g^4 T^2}{m_M^4} \propto \frac{g^4 T^5}{m_M^4} \propto \alpha^2 \frac{T^5}{m_M^4}$$

En effet, le propagateur est $\propto \frac{1}{q^2 - m_M^2} \approx -\frac{g^2}{m_M^2}$

↳ La condition $\Gamma_i > H$ implique donc $\alpha^2 \frac{T^5}{m_M^4} > \frac{T^2}{m_{pe}}$

$$\Leftrightarrow T^3 > \frac{m_M^4}{m_{pe} \cdot \alpha^2}$$

↳ L'équilibre chimique s'arrête à la température de découplage

T_{dec}^{chim} Dans le cas d'un médiateur lourd, on a:

$$T_{dec}^{chim} = \left(\frac{m_M^4}{\alpha^2 \cdot m_{pe}} \right)^{1/3} \gg m_i \text{ par hypothèse}$$

↳ Une fois $T < T_{dec}^{chim}$, le nombre de diffusion $i + \bar{i} \rightleftharpoons k + \bar{l}$ est négligeable: $n_i \cdot V = \text{cst}$ et $n_{\bar{i}} \cdot V = \text{cst}$.

DEF | On parle de relique chaude lorsque leur température de découplage correspond toujours à leur régime relativiste: lorsque $T_{dec}^{chim} \gg m_i$ et $T_{dec}^{kin} \gg m_i$

→ Il y a équilibre chimique de $T \gg m_i$ à $T_{dec}^{chim} \gg m_i$ et équilibre cinétique de $T \gg m_i$ à $T_{dec}^{kin} \gg m_i$

→ Si le découplage cinétique provient de l'arrêt du même processus lié au découplage chimique, on a $T_{dec}^{chim} = T_{dec}^{kin}$

→ Sinon, on a $T_{dec}^{kin} \ll T_{dec}^{chim}$. Une fois que $T < T_{dec}^{kin}$, il n'y a plus d'interaction et chaque impulsion reste inchangée, modulo un redshift global: $p \mapsto p \cdot \frac{a_{dec}^{kin}}{a}$

→ N.B.: la condition de découplage cinétique est $\Gamma \cdot \Delta E < H$ avec ΔE l'énergie moyenne échangée entre un e^- et E un γ pour $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \gamma$. Si découplage relativiste: $\frac{\Delta E}{E} \sim 1$.

① Cas du médiateur léger: $m_M \ll m_i$

→ Le découplage est non-relativiste: $T_{dec}^{chim} < m_i$

→ $\Gamma_i = n_i \langle \sigma v \rangle \propto m_i^{n-2} T^{-n} \cdot e^{-m_i/T}$

↳ Car $n_i \propto e^{-m_i/T}$ et $\langle \sigma v \rangle \propto m_i^{n-2} T^{-n}$ pour un certain n

↳ On doit comparer avec $H \propto T^2/m_{pl}$

→ $\Gamma_i > H$ ne peut pas rester vrai longtemps après que T soit $< T_i$ à cause du facteur $e^{-m_i/T}$

$\Rightarrow T_{dec}^{chim} \sim \frac{m_i}{\mathcal{O}(1)}$: c'est un relique froide

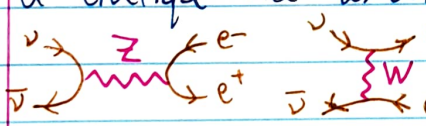
→ Pour un relique froide:

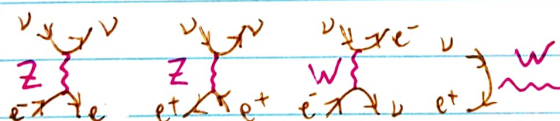
→ l'équilibre chimique se fait de $T \gg m_i$ à $T_{dec}^{chim} \sim m_i/\mathcal{O}(1)$

→ l'équilibre cinétique arrive en général bcp plus tard: il n'y a pas forte suppression du médiateur lourd ni de suppression de Boltzmann comme pour l'eq. chimique.

3.6 Découplage des neutrinos

→ A haute température, les neutrinos sont en équilibre chimique et cinétique via les interactions suivantes:

 : $\nu\bar{\nu} \rightleftharpoons e^+e^-$; processus chimiques et cinétiques.

 : $\bar{\nu}e^\pm \rightleftharpoons \bar{\nu}e^\pm$

→ Pour $T \gg M_\nu$, on a $\sigma \sim G_F^2 T^2$ avec $G_F \sim g^2/m_W^2$. De plus, ils sont relativistes: $v \sim 1$. Ainsi,

$\Gamma = n_\nu \langle \sigma v \rangle \propto T^3 \cdot \frac{g^2}{m_W^2} \cdot T^2 \propto G_F^2 T^5$

Par rapport au Paramètre de Hubble, on trouve:

$\frac{\Gamma}{H} \simeq \frac{G_F^2 T^5}{T^2/m_{pl}} \propto \frac{T^5}{m_W^4} \cdot \frac{m_{pl}}{T^2} \propto \left(\frac{T}{\text{MeV}}\right)^3$

↳ découplage chimique à $T \lesssim \text{MeV}$ et cinétique à $T \lesssim \text{MeV}$

↳ En effet, $\nu\bar{\nu} \rightleftharpoons e^+e^-$ et $\nu e^\pm \rightleftharpoons \nu e^\pm$ contribuent à la même dépendance T^5/m_ν^4 et $\Delta E_\nu/E_\nu \sim 1$.

⇒ Les neutrinos sont des reliques chaudes: $\text{MeV} \gg m_\nu \sim \text{eV}$

⊙ Pour $T > T_{\text{dec}}^\nu$:

→ En $T > \text{MeV}$, la densité de radiation et d'entropie sont données par:

$$\rightarrow \rho_R = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad \text{avec } T = T_\gamma = T_\nu = T_{e^\pm}$$

$$\text{et } g_* = g_\gamma + \frac{7}{8} (g_{e^\pm} + g_\nu) = 2 + \frac{7}{8} (2 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = \frac{43}{4} = 10,75$$

$$\rightarrow s = g_* \frac{2\pi^2}{45} T^3 = g_* \frac{2\pi^2}{45} T^3$$

⊙ Pour $T < T_{\text{dec}}^\nu$:

→ Lorsque $T < \text{MeV}$, il y a découplage chimique: $\begin{cases} n_\nu \cdot V = \text{cte} \\ n_{\bar{\nu}} \cdot V = \text{cte} \end{cases}$

Il n'y a plus non plus d'équilibre chimique. Cependant, on a toujours $T_\nu = T_{\bar{\nu}} = T_\gamma$ car ils varient de la même manière au cours du temps: $T_\nu = T_{\bar{\nu}} = T_{\text{dec}}^\nu \cdot \frac{a_{\text{dec}}}{a}$

→ La densité et l'entropie sont données par:

$$\rho_\nu = g_\nu \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T_\nu^4$$

$$s_\nu = g_\nu \frac{7}{8} \frac{2\pi^2}{45} T_\nu^3$$

↳ Les entropies s_ν et $s_{\gamma+e^\pm}$ sont conservées séparément:

$$s_\nu \cdot V \sim \frac{1}{a^3} \cdot a^3 \sim \text{cte} \quad \text{et} \quad s_{\gamma+e^\pm} \sim \frac{1}{a^3} \cdot a^3 \sim \text{cte}$$

⊙ Pour $T \leq \text{MeV}$:

→ Pour $T < 0,5 \text{ MeV}$, les $e^\pm$ deviennent non relativistes et sont supprimés du Boltzmann: $n_{e^\pm} \sim e^{-m_e/T}$. Seuls $n_{e^-} = n_{e^+}^{\text{initial}}$ électrons persistent: catastrophe d'annihilation.

→ Il n'y a presque plus d'électron p/r au nombre de γ , on peut donc négliger leur entropie. Cette entropie se retrouve dans la création de nombreux photons (pas de création de neutrinos car ils ont déjà découplés) $\Rightarrow s_\gamma \nearrow \rightarrow T_\gamma \nearrow$

↳ L'entropie est donnée par :

$$s_{\gamma, e^\pm}(T \gtrsim m_e) = \left(g_\gamma + \frac{7}{8} \frac{g_{e^\pm}}{2} \right) \cdot \frac{2\pi^2}{45} T_\gamma^3$$

$$= s_\gamma(T \lesssim m_e) = g_\gamma \frac{2\pi^2}{45} T_\gamma^3$$

$$\Rightarrow T_{\gamma<} = T_{\gamma>} \left(\frac{11/2}{2} \right)^{1/3} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} T_{\gamma>}$$

→ Lorsque $T \ll m_e$, on a $\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3}$ puisque la température des neutrinos est inchangée ; ils sont découplés cinétiquement.

① Pour $T \ll m_e$:

→ Tout est découplé ; il ne reste plus que le redshift :

$$\left. \begin{array}{l} T_\gamma \sim 1/a \\ T_\nu \sim 1/a \end{array} \right\} T_\gamma/T_\nu \sim \text{cte.}$$

② Pour $T = T_{\text{aujourd'hui}}$:

→ Lorsque $T = T_0^\gamma = 2,73 \text{ K}$ (mesuré via le CMB), on trouve que $T_0^\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} T_0^\gamma = 1,96 \text{ K}$: inobservable.

→ La densité de radiation est donnée par :

$$\left. \begin{array}{l} \rho_\gamma^0 = \frac{\pi^2}{30} g_\gamma T_0^4 \\ \rho_\nu^0 = \frac{\pi^2}{30} \frac{7}{8} g_\nu T_0^4 \end{array} \right\} \rho_R^0 = \frac{\pi^2}{30} T_0^4 \left(g_\gamma + \frac{7}{8} g_\nu \left(\frac{T_0^\nu}{T_0^\gamma} \right)^4 \right)$$

↳ Le paramètre de densité de radiation Ω_R^0 est

$$\Omega_R^0 \equiv \frac{\rho_R^0}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{4,31 \cdot 10^{-5}}{h^2}$$

→ L'entropie de radiation est donnée par:

$$s_R = \frac{2\pi^2}{45} g_{\text{eff}}^R T_0^3 = 2970 \text{ cm}^{-3}$$

g_{eff}^R

→ La densité de photon et de neutrinos est donnée par:

$$n_\gamma^0 = g_\gamma \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_0^3 = 422 \text{ cm}^{-3} \approx s_R / 7$$

$$n_\nu^0 = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_\nu^0^3 \cdot g_\nu = 344^{-3} \text{ si } n_\nu - n_{\bar{\nu}} \approx 0 \Leftrightarrow \mu_\nu \approx 0$$

⊙ Remarque 1:

→ Après le découplage des ν , le ratio $\frac{n_\nu}{n_\gamma}$ car les $e^\pm$ découpent, et ça change T_γ .

DEF

On définit le yield comme le ratio de la densité d'une particule par l'entropie: $Y_p \equiv n_p / s$

→ Pour les neutrinos; $Y_\nu \equiv n_\nu / s$

↳ le yield $Y_\nu \equiv n_\nu / s$ est conservé car $\frac{n_\nu}{s} \approx \frac{V^{-1}}{V^{-1}} \approx \text{cte}$

→ Avant le découplage, on avait

$$Y_\nu \Big|_{T_{\text{dec}}^\nu} = \frac{g_\nu \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{\text{dec}}^{\nu 3}}{\frac{2\pi^2}{45} g_{\text{eff}}^R(T_{\text{dec}}^\nu) \cdot T_{\text{dec}}^{\nu 3}} \approx 0,2 \cdot \frac{g_\nu}{g_{\text{eff}}^R} \Big|_{T_{\text{dec}}^\nu} = \frac{n_\nu}{s} \Big|_{T_0} = Y_\nu \Big|_{T_0}$$

↳ On retrouve bien que $n_\nu|_0 = 1_R \frac{g_\nu}{g_{\text{eff}}^R} \Big|_{T_{\text{dec}}^\nu} \cdot 0,208 = 344 \text{ cm}^{-3}$

⊙ Remarque 2:

→ Tous les résultats font l'hypothèse que $m_\nu = 0$ mais on sait que
 $0,05 \text{ eV} \leq m_{\nu_3} \leq \sim 1 \text{ eV}$
 $0,01 \text{ eV} \leq m_{\nu_2} \leq \sim 1 \text{ eV}$
 $0 \leq m_{\nu_1} \leq \sim 1 \text{ eV}$
 Cependant, puisque $T_0 \sim 10^{-3} \text{ eV}$, au moins 2 ν sont devenu non-rela., mais très récemment $\Rightarrow n_\nu$ inchangé et 2ν inchangé également.

→ Si les 3 neutrinos sont non relativistes, on a:

$$\frac{\rho_\nu}{\rho_{cr}} = \frac{n_\nu}{3} \cdot \frac{\sum m_\nu}{\rho_{cr}} = \Omega_\nu \Rightarrow \Omega_\nu = \frac{\sum m_\nu}{91 \text{ eV} \cdot h^2}$$

Puisque on sait que $\sum m_\nu \leq 2,4 \text{ eV}$, on a $\Omega_\nu \leq 1\%$.

→ Contrainte cosmologique: si les ν sont massifs, ils voyagent moins librement car moins relativistes, et ils ralentissent moins la formation de grandes structures.

③ Remarque 3:

→ Lors du découplage des e^+e^- , non seulement l'entropie totale est conservée, mais également l'énergie totale: la variation de p_r crée une variation de l'énergie d'expansion ($\propto \dot{a}^2$) et une variation d'énergie associée à la pression.

→ L'équation de continuité est toujours respectée.

3.7 Ratio baryon-photon

DEF On définit l'abondance des baryons η (ou "ratio of B to γ ") selon

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma}$$

→ Aujourd'hui, $\eta^0 = \frac{n_B}{n_\gamma} \Big|_{t_0} = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \Big|_{t_0} \approx \frac{n_B}{n_\gamma} \Big|_{t_0} \approx \frac{\rho_B}{n_\gamma \cdot m_B} \Big|_{t_0}$

$$= \frac{\rho_B}{\rho_{cr}} \cdot \frac{\rho_{cr}}{m_B \cdot n_\gamma^0} = 2,7 \cdot 10^{-8} \Omega_B h^2 \ll 1$$

Baryons non relativistes ajd

↳ Ce faible pourcentage est explicable apr de la catastrophe d'annihilation où $\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \ll 1$ à $T \sim \text{GeV}$ mais $\neq 0$.

③ En $T \sim m_p$:

→ Lorsque $T \sim 1 \text{ GeV}$, en assumant que $\frac{n_p - n_{\bar{p}}}{n_\gamma} \ll 1$, alors:

$$n_p \sim n_{\bar{p}} \sim n_n \sim n_{\bar{n}} \sim n_\gamma$$

$$\frac{n_n - n_{\bar{n}}}{n_\gamma} \ll 1$$

④ En $T \lesssim m_p$:

→ Lorsque $T \lesssim 1 \text{ GeV}$, il y a catastrophe d'annihilation:
 $p\bar{p} \rightarrow \pi\pi$ (interaction forte donc $\Gamma_{p\bar{p} \rightarrow \pi\pi}$ très large)

↳ $\Gamma_{p\bar{p} \rightarrow \pi\pi}$ devient plus petit que Γ (découplage) très tard: lorsque
 $T = T_{\text{dec}} \simeq \frac{m_p}{40} \simeq 22 \text{ MeV}$

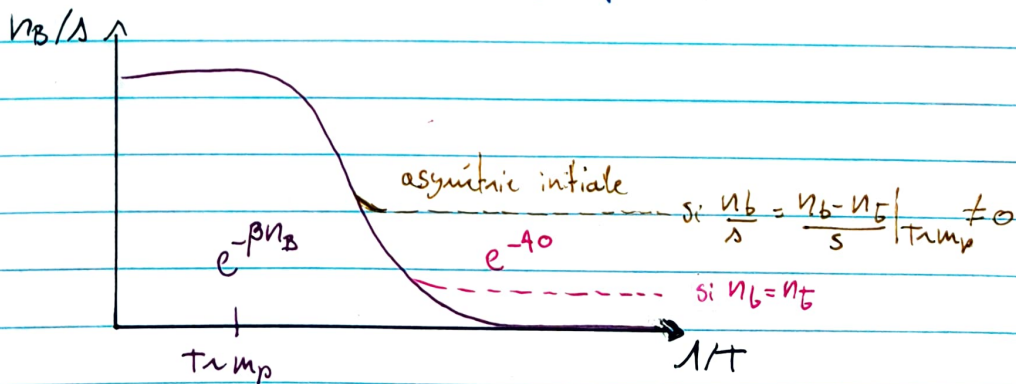
↳ Si $n_b - n_{\bar{b}} = n_B$ avait été nul en $T \sim m_p$, alors

$$\eta_p = \frac{n_p}{n_\gamma} = \frac{n_{\bar{p}}}{n_\gamma} \propto e^{-m_p/T} \Big|_{T=\frac{m_p}{40}} = e^{-40} : \text{extrêmement faible!}$$

En fait, on a $n_B \neq 0$ en $T \sim m_p$. Lorsque $T \lesssim m_p$, il y a une suppression de Boltzmann $n_{\bar{p}} \propto e^{-m_p/T}$ jusqu'à atteindre $n_{\bar{p}} \sim 0$ et $n_p = n_p - n_{\bar{p}}$.

↳ Dans ce cas, $\frac{n_b - n_{\bar{b}}}{s} \Big|_{T \sim m_p} = \frac{n_B}{s} \Big|_{t_0}$ et η^0 est très petit aid

car la "condition initiale" était déjà petite.



3.8 Brève histoire thermique de l'univers

→ Description de l'univers en fonction de la température, en ouvrant la matière noire, la baryogénèse et l'inflation.

⊙ En $T \gg m_{SM, particules}$:

→ Toutes les particules du MS sont en équilibre thermique et relativistes:

$$\begin{array}{llll} f + \bar{f} \rightleftharpoons f + \bar{f} & f\bar{f} \rightleftharpoons \gamma\gamma, g g & W^+ W^- \rightleftharpoons \gamma\gamma & Z Z \rightleftharpoons W^+ W^- \\ Z \rightleftharpoons f\bar{f} & h \rightleftharpoons f\bar{f} & h h \rightleftharpoons f\bar{f} & \end{array}$$

→ Lorsque $T \gg m_{top}$, le nombre effectif de dof relativiste est:

$$g_* = \underbrace{g_{W^{\pm}, Z}}_{2 \times 3} + \underbrace{g_h}_{4} + \underbrace{g_\gamma}_{2} + \underbrace{g_{g_e}}_{2 \times 8} + \frac{7}{8} (g_{et} + g_q + g_\nu) = 106,75$$

$$\quad \quad \quad 4 \times 3 \quad 6 \times 4 \times 3 \quad 3 \times 2$$

⊙ En $T \approx 200 \text{ GeV}$:

→ On a la brisure de symétrie électrofaible: les fermions, et les bosons du $U(1)$ $W^+ W^-$ et Z deviennent massifs.

$$g_{W^{\pm}, Z} = 2 \times 3 \mapsto 3 \times 3 \text{ et } g_h = 4 \mapsto 1 \mapsto g_* \mapsto g_*$$

⊙ En $T \leq m_e$:

→ Lorsque $T \leq m_e$ (ou de manière analogue, $T \leq m_{W, Z}$, $T \leq m_b$, $T \leq m_c$ ou encore $T \leq m_e$), la particule va découpler et $g_e \notin g_*$ et on va observer une catastrophe d'annihilation:

$$e \rightarrow b + e + \nu : \text{la particule disparaît du bain thermique.}$$

⊙ En $T \approx \text{GeV}$:

→ On a la transition de phase QCD: les quarks perdent leur liberté asymptotique et forment des hadrons: $p, n, \pi^{\pm 0}, K^{\pm 0}, \eta, \dots$ (u, d, s)

① En $T \lesssim m_p$:

→ Une autre catastrophe d'annihilation, pour les protons: $\frac{n_p}{n_\gamma} \ll 1$ et $n_{\bar{p}} = 0$, jusqu'à $n_b \cdot V = \text{cste}$.

② En $T \lesssim m_K$: découplage des $K^{\pm 0}$: $K \rightarrow \pi e \nu \Rightarrow$ plus de K

③ En $T \lesssim 130 \text{ MeV} = m_\pi$: découplage des $\pi^{\pm 0}$: $\pi^\pm \rightarrow e \nu$, $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma \Rightarrow$ plus de π

④ En $T \lesssim m_\mu = 100 \text{ MeV}$: découplage des $\mu^\pm$: $\mu \rightarrow e \nu \mu \Rightarrow$ plus de $\mu^\pm$

⑤ En $T \sim 0,1 \text{ MeV}$:

→ Lorsque $T \sim$ énergie de liaison nucléaire, des protons et neutrons forment des noyaux légers: d , ^3H , ^4He .

→ Les neutrinos découplent mais ce sont des reliques chaudes: pas de catastrophe d'annihilation

→ Lorsque $T \lesssim m_e$: catastrophe d'annihilation pour les électrons:
 $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma \Rightarrow n_{e^+} \sim 0$
 relique froide $\leftarrow n_{e^-} \sim n_p$

⑥ En $T \sim 3 \text{ eV}$:

→ La matière prend le dessus sur le rayonnement: $k = \frac{E_Q}{k_{m=R}}$

⑦ En $T \sim \text{eV}$:

→ Les photons découplent cinétiquement et se recombinaient avec les protons: $e^- + p \rightarrow H$. Les particules chargées disparaissent et l'univers devient transparent; c'est le CMB.

→ Bien plus tard, les e^- découplent cinétiquement

⑧ En $T \lesssim 0,1 \text{ eV}$: les ν deviennent non-relativistes.